SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

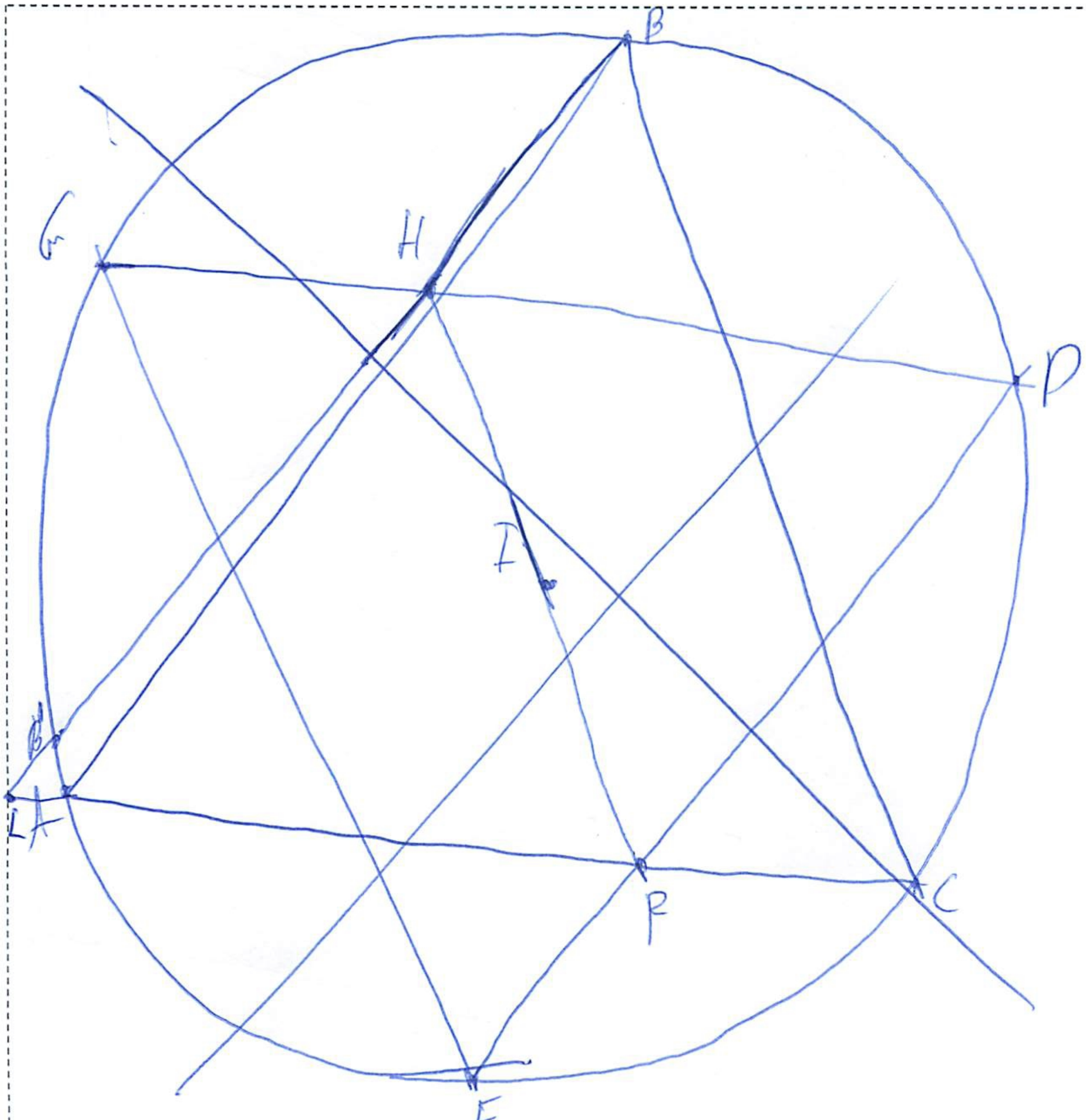
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	5

25.04.2015/ მათ/III/ 607

ამოცანა № ~~I~~

გვერდი № ~~1~~



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

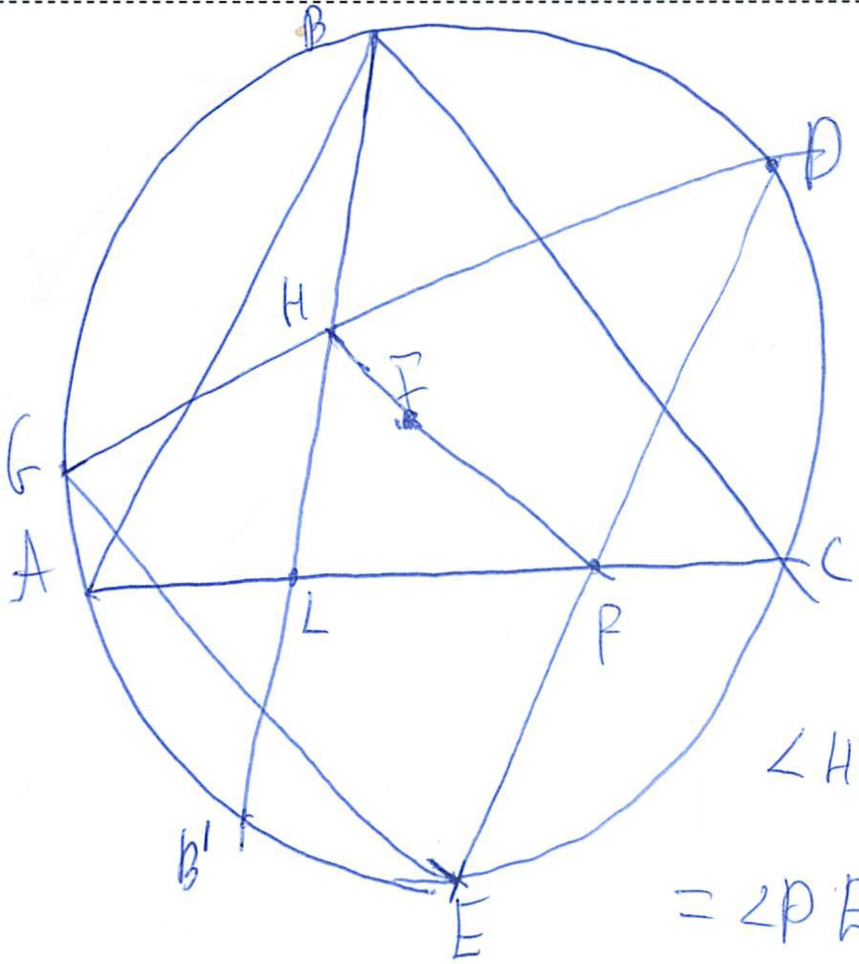
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5

25.04.2015/ მათ/III/ 607

ამოცანა № 1

გვერდი № 1



$IE = EC = AE$ (1)

$DI = DC = BD$.

$\angle DGE = \angle AFE =$

$= \angle DFC$ (2).

$\angle FID = DFC$ (3)

$\Downarrow$

$\angle HID = \angle DHI =$

$= \angle DEG = \angle DGE = \angle AFE$

~~=~~ P

$\angle DBC = \angle DCB$

$\Downarrow$

$\angle HDF = \angle HFA$ ~~...~~ $\triangle$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

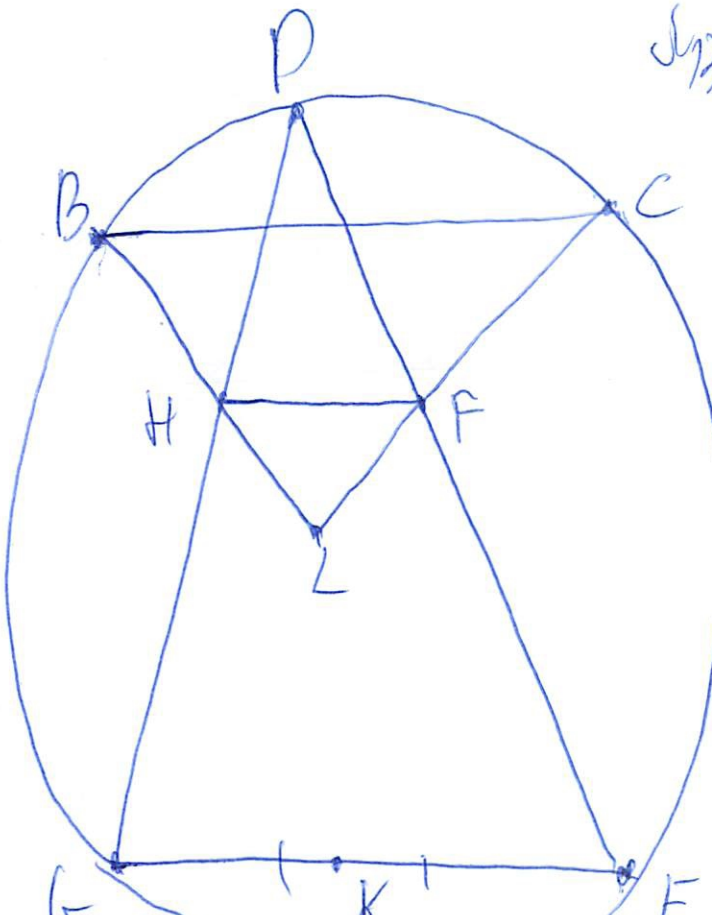
მაგიდა № 5

25.04.2015/ მათ/III/ 607

ამოცანა № 1

გვერდი № 2.

ვუყუროთ ახლა ნახაზს.



$DB=DC$ და $DG=DF$

ასევე $HD=DF$.

სიმეტრიიდან გამომდ., რომ.

$\angle FHL = \angle HFL$

ჩვენ ვიცით.

DK-ს სიმეტრიით.

$\Downarrow$

$\angle HDF = \angle FHL \Rightarrow$

$\Rightarrow BH$ არის HDF-ში

მეოთხე (4)

[illegible] ~~[illegible]~~ ამ 4 [illegible] დამტკიცდა.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

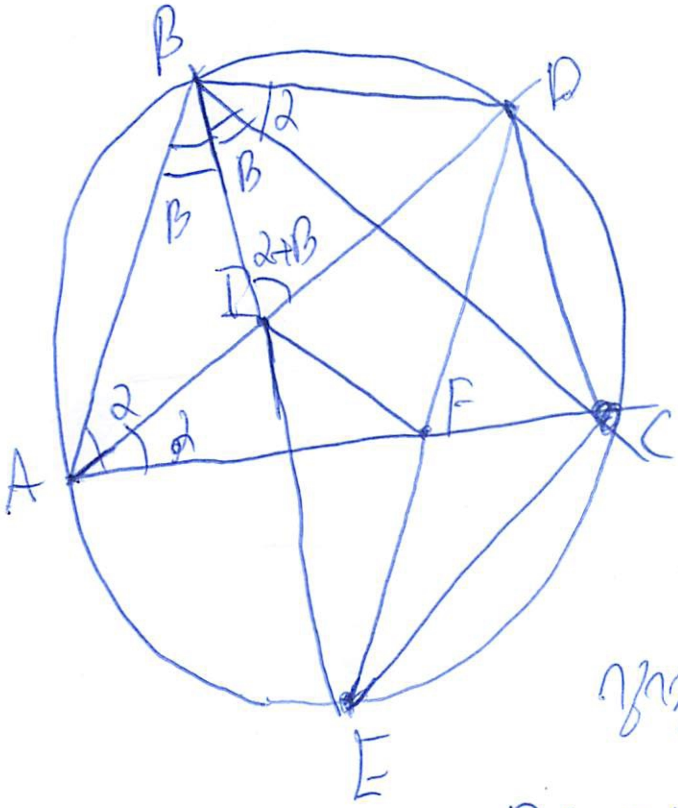
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5

25.04.2015/ მათ/III/ 607

ამოცანა № 1

გვერდი № 3.



$\angle BAD = \angle DAC \Rightarrow$

$\Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC} \Rightarrow$

$BD = DC$.

ცნობილი ფაქტია, რომ

$ID = BD = DC$.

ვიგებთ BE-ზე (1)

$$\left.\begin{array}{l} DC = ID \\ IE = EC \\ DE \text{ საერთო} \end{array}\right| \Rightarrow \Delta DIE = \Delta DCE$$

სიმეტრიის გამო, რომ $\angle DFI = \angle DFC$ (3)

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

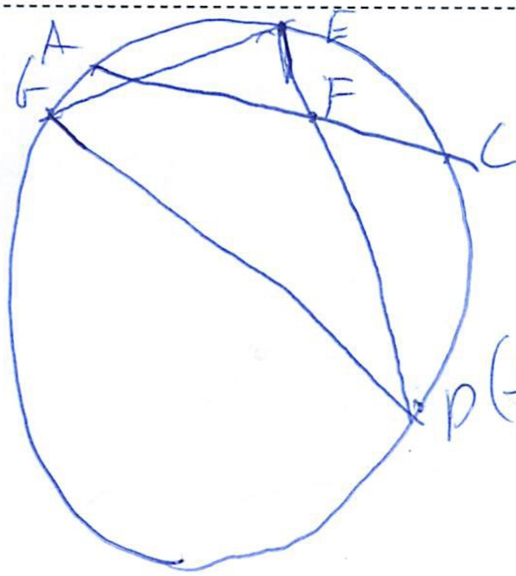
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5

25.04.2015/ მათ/III/ 607

ამოცანა № 1

გვერდი № 4.



$\angle EGD = \frac{\overset{\smile}{ED}}{2} = \frac{\overset{\smile}{EC} + \overset{\smile}{CD}}{2}$

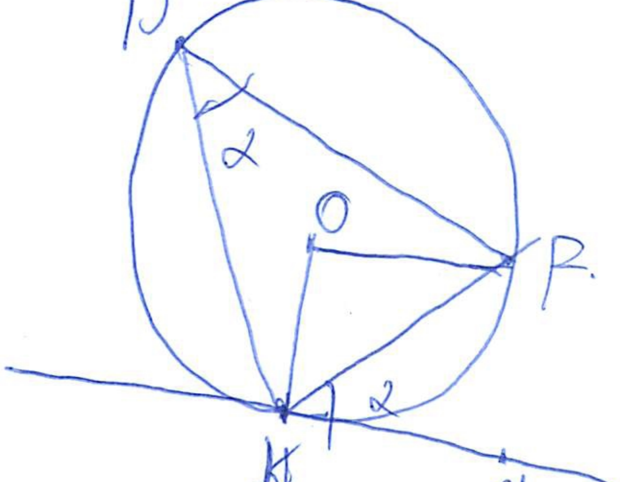
$\angle CFD = \frac{\overset{\smile}{CD}}{2} + \frac{\overset{\smile}{AE}}{2} = \frac{\overset{\smile}{CD} + \overset{\smile}{EC}}{2}$

$(1) \Rightarrow$ ~~AE = EC~~

$AE = EC \Rightarrow \angle AFE = \angle EGD$

$\Downarrow$ (2)

~~$\angle AEFF$~~



$\angle HOP = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OHP = 90 - \alpha \Rightarrow$

$\angle OHB' = 90^0$

$\Downarrow$

(4)

ს.ჯ.დ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5

25.04.2015/ მათ/III/ 607

ამოცანა № 2

გვერდი № 1

[illegible] n [illegible]

[illegible] $f(a_{n-1})$ -ში და $f(b_{n-1})$ [illegible]
[illegible]

[illegible] $(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0$ [illegible]

$x+\frac{1}{2}$ [illegible] $a_n > a_{n-1}$

და

x^2 [illegible] $a_n < a_{n-1}$ -ში $\Rightarrow$

[illegible]

$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0$ [illegible]

[illegible] $\Rightarrow$ [illegible]

a_n -ში და b_n -ში [illegible]

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5

25.04.2015/ მათ/III/ 607

ამოცანა № 2

გვერდი № 2.

[illegible] [illegible] [illegible] $x+\frac{1}{2}$ (1)

x^2 (2)

~~1 [illegible] [illegible]~~

[illegible] $b = a+p$ სადაც $p>0$.

[illegible] [illegible] [illegible], რადგან $b>a$

p [illegible] n-ური [illegible] $b_n = a_n + p_n$.

(1) [illegible] [illegible] $b_n - a_n$ არ [illegible] [illegible] $\frac{1}{2}$-ზე.

(2) [illegible] [illegible].

$b_n = a_n + p_n$ $(a_n+p_n)^2 - a_n^2 = 2a_n \cdot p_n + p_n^2$ $\Rightarrow$

(2) [illegible] [illegible] [illegible], სადაც $a_n \geq 2$

$\Rightarrow 2a_n \geq 1 \Rightarrow (a_n+p_n)^2 - a_n^2 \geq p_n + p_n^2 \Rightarrow p_{n+1} \geq p_n + p_n^2$

(2) [illegible] [illegible] -

7

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5	25.04.2015/ მათ/III/ 6C7

ამოცანა № 2

გვერდი № 3.

ვაჩვენოთ, რომ $b-a$ უარყოფითი [illegible]
არ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], რომ
(1) [illegible] [illegible] უარყოფითი [illegible]
(2) [illegible] [illegible] (2) [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] (2) [illegible] [illegible].

$\cancel{b_k - a_k \geq b_{k-1} - a_{k-1} + (b_{k-1} - a_{k-1})^3 \geq}$

$\cancel{\geq (b_{k-2}) (b_{k-2} - a_{k-2}) + ((b_{k-2}) - (a_{k-2}))^3 \geq}$

$\ldots \geq$

8

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5

25.04.2015/ მათ/III/ 607

ამოცანა № 2

გვერდი № 4.

(1) ოპერაციის შემდეგ $p(n)$ არ იცვლება, ამიტომ

~~[illegible]~~ n ცალი $B(2)$ ოპერაციის შემდეგ.

$P_n \geq P_0 + n\beta^2$ [illegible].

[illegible] n ცალი (2)-ში არის n ცალი P^2 ოპერაცია

და B P-ების შორის ყველაზე [illegible].

$n\beta^2$ არის უსასრულოდ დიდი ⇒

⇒ P_n არის უსასრულოდ დიდი რაც [illegible].

არ შეიძლება [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] არსებობს n ⇒ მოიძებნება

a_n და b_n, [illegible] $(a_n - a_{n+1})(b_n - b_{n+1}) < 0$

n.p.g. $\boxed{3}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5	25.04.2015/ მათ/III/ 607
ამოცანა № 2	გვერდი № 5

$p_n \geq p_0 + \cancel{n}(n-1) p_0^2$ [illegible].

$p_n \geq p_{n-1} + p_{n-1}^2 \geq p_{n-2} + p_{n-2}^2 + p_{n-1}^2 \ldots$

$\ldots \geq p_0 + p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + \ldots \ldots p_{n-1}^2 \geq$

$\cancel{\geq p_0 + (n-1)p_0^2}$ ~~[illegible]~~

$\geq p_0 + n p_0^2$.

10

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5

25.04.2015/ მათ/III/ 607

ამოცანა № 3

გვერდი № 1.

$x=1$ $y=1$ და $x=1$ $y=1$ [illegible].

x [illegible] [illegible].

დავუშვათ ~~$x \vdots 3$~~ $x \geq y$ [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible].

$7x^2-13xy+7y^2$ და $(|x-y|+1)^3$

[illegible] [illegible]. x-ს [illegible]

[illegible].

$7x^2-13xy+7y^2=(x-y+1)^3$.

დავუშვათ $x \vdots 3$.

მაშინ. $7y^2 \equiv (x-y+1)^3 \mod 3$

$\Downarrow$

$1 \equiv (-y+1)^3 \pmod 3$ $y=1;2+3k$.

$\Downarrow$

$1 \equiv 2;0 \pmod 3$ [illegible]

$y=3k$.

$0 \equiv 1 \pmod 3$ [illegible]

$\Downarrow$

$x \vdots 3$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5

25.04.2015/ მათ/III/ 607

ამოცანა № 3

გვერდი № 2.

[illegible] [illegible] $y \vdots 3$.

$7x^2 \equiv (x+1)^3 \pmod 3$

$x \equiv 1; 2$

$1 \equiv (x+1)^3 \Rightarrow 1 \equiv 2; 0$ [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] $\Rightarrow$ $x; y \not\vdots 3$.

$7x^2 - 13xy + 7y^2 = 7(x-y)^2 + xy = 1,5(x-y)^2 + \frac{x^2+y^2}{2}$

12

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5	25.04.2015/ მათ/III/ 607

ამოცანა № 3	გვერდი № 3.

$x=y+p$. $p \in N_0$.

$y^2+py+7p^2=(p^3+1)^3$.

$y^2+py+7p^2-(p^3+1)^3=0$.

$D=p^2-28p^2+4(p^3+1)^3=4p^3-15p^2+12p^2+4=k^2$.

$4p^3-15p^2+12p^2+4=(p-2)(4p^2-7p-2)=$

$=(p-2)(p-2)(4p+1)=(p-2)^2(4p+1)=k^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $4p+1$ — სრული კვადრატი.

$y=\frac{-p\pm\sqrt{D}}{2}$ ცხადია $4p+1$ სრული კვადრატი-

ვის მივიღებთ x და y.

სადაც p არ არის $(p-2)^2(4p+1)$ არ არის

და p ... $-p\pm\sqrt{D} \vdots 2$ $(p-2)^2(4p+1)$ ... ...

13

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 5

25.04.2015/ მათ/III/ 607

ამოცანა № 3

გვერდი № 4.

[illegible] ~~k~~ k კენტი $k^2=4p+1$, $k\in N$.

ორი ამოხსნა.

ამიტომ. $4p+1=k^2$ აქვს ორი ამოხსნა

$\Downarrow$

ჩვენ [illegible] აქვს ორი ამოხსნა.

$y=\frac{-p\pm(p-2)k^2}{2}$ სადაც $p=\frac{k^2-1}{4}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow y=\frac{-\frac{k^2-1}{4}\pm\frac{k^2-9}{4}k}{2}$ ყველა ასეთ ამოხსნები სადაც k კენტი [illegible].

$x=y+\frac{4k^2-1}{4}$

სხვა ამოხსნები. x და y-ის [illegible] [illegible]. ჩვენ ავიღეთ, რომ $x\geq y$ [illegible]. სიმეტრიული ამოხსნები $y\geq x$ [illegible].